ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део први

26. јун 2014

Професор: Игор Долинка Асистент: Бојан Башић

1. Знајући да важи
$$17! = \overline{333\,110\,04a\,323\,043\,03b\,000}_5,$$
одредити цифре a и b.

2. Доказати да постоји бесконачно много парова различитих природних бројева n и k таквих да важи НЗД$(n!+1, k!+1) > 1$.

3. Доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост
$$\sigma(n!) \leqslant \frac{(n+1)!}{2}.$$
<u>Једна идеја:</u> Испитати директно случајеве $n \leqslant 7$, па претпоставити $n \geqslant 8$. Ако је $n! = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ канонична факторизација броја $n!$, доказати најпре неједнакост
$$\sigma(n!) < n!\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}\right)$$
(ово се може постићи коришћењем формуле за функцију σ, затим извлачењем $n!$ испред заграде и директним упоређивањем добијеног израза с десном страном жељене неједнакости), потом део у загради ограничити одозго са
$$\frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{9}{8}},$$
и одавде једноставно завршити доказ.

ПОПРАВНИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

Део други

26. јун 2014

Професор: Игор Долинка Асистент: Бојан Башић

1. Доказати да не постоје четири узастопна природна броја од којих се сваки може представити као збир квадрата два цела броја.

2. a) Доказати да, за ма које природне бројеве p, q и r такве да су бројеви pq и r узајамно прости, постоји бесконачно много тројки природних бројева x, y и z таквих да важи
$$x^p + y^q = z^r.$$
   b) У скупу природних бројева наћи бар два решења једначине
$$x^3 + y^4 = z^5.$$
<u>Једна идеја:</u> За део под а) утврдити да се може уочити природан број m такав да се за x облика $a(a^p+1)^{qm}$ и y облика $(a^p+1)^{pm}$ увек може наћи погодно z такво да посматрана једнакост буде испуњена.

3. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину
$$1064^x = 243^y + 1063,$$
знајући да је 1064 примитиван корен по модулу 243.